大学数学のアトリエ｜線形代数　第 2 章　連立一次方程式

No.1　掃き出し法

この回のゴール

- 連立一次方程式を拡大係数行列で表せる．
- 行基本変形で解が変わらない理由を説明できる．
- 掃き出し法で，解が 1 つ・無数・なしのどの場合も解を求められる（判定できる）．

■ 1. 加減法を行列で書く

高校までの加減法で，次の連立方程式を解いてみよう．

$$\begin{cases} x+y+z=6 & \cdots ① \\ 2x+3y-z=5 & \cdots ② \\ x-y+2z=5 & \cdots ③ \end{cases}$$

「② から ① $\times 2$ を引く」「③ から ① を引く」… と式どうしを足し引きして文字を消していく．このとき実際に動いているのは**係数と右辺の数だけ**で，x, y, z という文字は位置を示す目印にすぎない．そこで数だけを並べて計算する．

定義 1　係数行列・拡大係数行列

m 本の式，n 個の未知数 $x_1, \ldots, x_n$ からなる連立一次方程式

$$\begin{cases} a_{11}x_1+a_{12}x_2+\cdots+a_{1n}x_n=b_1 \\ \quad\vdots \\ a_{m1}x_1+a_{m2}x_2+\cdots+a_{mn}x_n=b_m \end{cases}$$

に対し，$A=(a_{ij})$ を**係数行列**，A の右に右辺の列ベクトル $\boldsymbol{b}$ を並べた $m\times(n+1)$ 行列

$$(A\mid\boldsymbol{b})=\left(\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} & b_1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} & b_m \end{array}\right)$$

を**拡大係数行列**という．方程式は $A\boldsymbol{x}=\boldsymbol{b}$ と書ける．

■ 2. 行基本変形で解は変わらない

定理 1

拡大係数行列 $(A \mid \boldsymbol{b})$ に行基本変形を行って $(A' \mid \boldsymbol{b}')$ になったとする．このとき，方程式 $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ と $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ の解はまったく同じである．

【証明】行った変形に対応する基本行列の積を P とすると，$A' = PA$，$\boldsymbol{b}' = P\boldsymbol{b}$ で，P は正則である．$A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$ なら，左から P を掛けて $PA\boldsymbol{x} = P\boldsymbol{b}$，つまり $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$．逆に $A'\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}'$ なら，左から P^{-1} を掛けて $A\boldsymbol{x} = \boldsymbol{b}$. □

ポイントは「どの変形も**元に戻せる**」ことである．戻せるから，変形の前後で「解である」という性質が行きも帰りも保たれる．（もし式を 0 倍すると戻せなくなり，解が増えてしまう．）

■ 3. 掃き出し法

掃き出し法の手順

1. 拡大係数行列 $(A \mid \boldsymbol{b})$ を作る．
2. 行基本変形で，**左の A の部分**が簡約階段行列になるまで変形する（第 1 章 No.4 の手順）．
3. できあがった行列を方程式に戻して，解を読み取る．

例題 1　解がただ 1 つ

第 1 節の連立方程式を掃き出し法で解け．

【解答】

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 3 & -1 & 5 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{②-①\times 2,\ ③-①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 6 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & -2 & 1 & -1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①-②,\ ③+②\times 2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & -5 & -15 \end{array}\right) \xrightarrow{③\times(-\frac{1}{5})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 4 & 13 \\ 0 & 1 & -3 & -7 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①-③\times 4,\ ②+③\times 3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{array}\right).$$

方程式に戻すと $x = 1,\ y = 2,\ z = 3$.

例題 2　解が無数にある

$$\begin{cases} x + 2y + z = 3 \\ 2x + 4y + 3z = 7 \\ x + 2y + 2z = 4 \end{cases}$$ を解け．

【解答】

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 4 & 3 & 7 \\ 1 & 2 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{②-①\times 2,\ ③-①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{①-②,\ ③-②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

方程式に戻すと

$$x+2y=2,\qquad z=1,\qquad 0=0.$$

第 3 式はいつでも成り立つので，条件は最初の 2 つだけ．y は自由に選べるので $y=t$（t は任意の実数）とおくと，

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2-2t\\t\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\0\\1\end{pmatrix}+t\begin{pmatrix}-2\\1\\0\end{pmatrix}\qquad (t\text{ は任意の実数}).$$

どの文字を自由にするか

簡約階段行列で**主成分がある列**の未知数（例題 2 では x，z）は，他の未知数で表される．**主成分がない列**の未知数（例題 2 では y）を自由に選べる文字（パラメータ）にする．これに従うと，解の表し方がいつも機械的に決まる．

コラム：解を図形で見る

例題 2 の解は，点 $(2,\,0,\,1)$ を通り，方向ベクトル $(-2,\,1,\,0)$ をもつ**直線**である．3 本の平面はどれも異なるが，第 2 式は第 1 式と第 3 式を足したものになっている（$(x+2y+z)+(x+2y+2z)=2x+4y+3z$，$3+4=7$）．1 本の方程式が残り 2 本から導かれるので，独立な条件は 2 つしかない．そのため，3 枚の平面の共通部分として直線が残る．例題 1 では 3 枚の平面が 1 点で交わっている．

例題 3　解がない

$$\begin{cases}x+y+z=1\\x+2y+3z=2\\2x+3y+4z=4\end{cases}\qquad \text{を解け．}$$

【解答】

$$\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\1&2&3&2\\2&3&4&4\end{array}\right)\xrightarrow{②-①,\ ③-①\times 2}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&2&1\\0&1&2&2\end{array}\right)\xrightarrow{③-②}\left(\begin{array}{ccc|c}1&1&1&1\\0&1&2&1\\0&0&0&1\end{array}\right).$$

第 3 行は $0x+0y+0z=1$，つまり $0=1$ を表す．これはどんな x, y, z でも成り立たないので，**解なし**．

注意

左側がすべて 0 で右側が 0 でない行 $(0\ \cdots\ 0\mid c)$（$c\neq 0$）が現れたら，その時点で解なしと判定してよい．最後まで簡約する必要はない．

■ 練習問題

1. 次の連立方程式を掃き出し法で解け.

$$(1)\ \begin{cases} 2x+y-z=2 \\ x-y+2z=5 \\ 3x+2y+z=5 \end{cases} \qquad (2)\ \begin{cases} x-y+2z=1 \\ 2x-2y+5z=4 \\ 3x-3y+7z=5 \end{cases} \qquad (3)\ \begin{cases} x+y+2z=3 \\ 2x+3y+5z=8 \\ x+2y+3z=4 \end{cases}$$

2. 次の連立方程式を解け（未知数が 4 個，式が 3 本）.

$$\begin{cases} x_1+2x_2-x_3+x_4=2 \\ 2x_1+4x_2+4x_4=6 \\ x_1+2x_2+x_3+3x_4=4 \end{cases}$$

3. 例題 2 の解 $\begin{pmatrix} 2-2t \\ t \\ 1 \end{pmatrix}$ が，どんな t に対しても元の 3 本の式を満たすことを，代入して確かめよ.

4.（考えてみよう）定理 1 の証明では「基本行列が正則であること」を使った．もし「ある式を 0 倍する」という操作を許すと，解が変わってしまうことがある．具体例を作って説明せよ.

■ 練習問題の解答

1. (1)

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{①\leftrightarrow②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 2 & 1 & -1 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 5 \end{array}\right) \xrightarrow{②-①\times2,\ ③-①\times3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -8 \\ 0 & 5 & -5 & -10 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③\times\frac{1}{5}} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 3 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{②\leftrightarrow③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 3 & -5 & -8 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①+②,\ ③-②\times3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -2 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{③\times(-\frac{1}{2})} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①-③,\ ②+③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right).$$

$x = 2,\ y = -1,\ z = 1.$

(2)

$$\xrightarrow{②-①\times2,\ ③-①\times3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{array}\right) \xrightarrow{①-②\times2,\ ③-②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

$x - y = -3,\ z = 2.$ 主成分のない列は y なので $y = t$ とおくと $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ (t は任意).

(3)

$$\xrightarrow{②-①\times2,\ ③-①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{③-②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{array}\right).$$

第 3 行が $0 = -1$ を表すので解なし.

2.

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & 0 & 4 & 6 \\ 1 & 2 & 1 & 3 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{②-①\times2,\ ③-①} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③-②} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{②\times\frac{1}{2}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{①+②} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right).$$

主成分は第 1 列と第 3 列. 主成分のない x_2, x_4 を $x_2 = s,\ x_4 = t$ とおくと, $x_1 = 3 - 2s - 2t,\ x_3 = 1 - t.$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + s \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad (s, t \text{ は任意の実数}).$$

3. $(2 - 2t) + 2t + 1 = 3,\ 2(2 - 2t) + 4t + 3 = 7,\ (2 - 2t) + 2t + 2 = 4.$ どれも t によらず成り立つ.

4. 例えば $\begin{cases} x+y=2 \\ x-y=0 \end{cases}$ の解は $x=y=1$ だけである．第 2 式を 0 倍すると $\begin{cases} x+y=2 \\ 0=0 \end{cases}$ となり，$x=2,\ y=0$ なども解になってしまう．0 倍は元に戻せない（逆の変形がない）ので，解が増えてしまう．